

1

POJĘCIA PODSTAWOWE I NOTACJA

W sposób nieco uproszczony, lecz ogólny, problem decyzyjny można sformułować sposób następujący:

$$\begin{aligned} & \text{dla danego zbioru wariantów} \\ & \text{wybierz wariant, który} \\ & \text{w danym kontekście decyzyjnym} \\ & \text{jest najbardziej preferowany.} \end{aligned} \tag{1}$$

Warianty porównujemy na podstawie *kryteriów*, które są źródłem *ocen* wariantów.

Ponieważ jako regułę przyjęliśmy, że mamy do czynienia z więcej niż jednym kryterium, sprawa nie jest oczywista.

Zauważmy jednak najpierw, że nawet w przypadku dwóch lub więcej kryteriów zdarzają się sytuacje, gdy w zbiorze wariantów dopuszczalnych jeden wariant jest względem wszystkich kryteriów bardziej preferowany niż każdy inny wariant. Takie warianty nazywamy *utopijnymi* (stosowany jest także termin *wariant idealny*).

Tabela 1 i odpowiadający jej rysunek 1 przedstawiają przypadek, gdzie występują tylko dwa warianty i jeden z nich jest utopijny (wariant A).

Tablica 1 Dwa warianty, z których jeden jest utopijny.

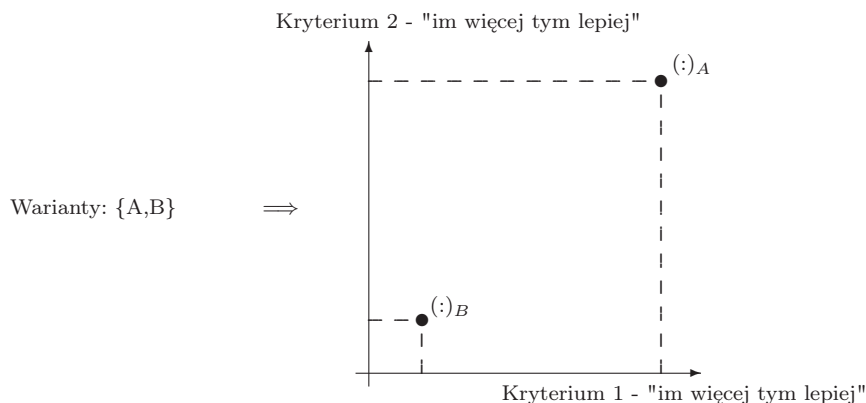
| | <i>Typ kryterium</i> | <i>Wariant A</i> | <i>Wariant B</i> |
|-------------|------------------------|------------------|------------------|
| Kryterium 1 | "im więcej tym lepiej" | 75 | 25 |
| Kryterium 2 | "im więcej tym lepiej" | 75 | 25 |

Rysunek 2 przedstawia sytuację, gdzie wariant utopijny nie występuje (gdyż nie istnieje dopuszczalny wariant odpowiadający najbardziej preferowanym wartościom kryteriów reprezentowanych przez \hat{y}).

W praktyce warianty utopijne występują niezbyt często.

Z drugiej strony, często zdarza się, że z pary dwóch wariantów jeden jest preferowany ze względu na wszystkie kryteria.

Mówimy wtedy, że zachodzi *dominacja*.



Rysunek 1 Przykład z dwoma wariantami.

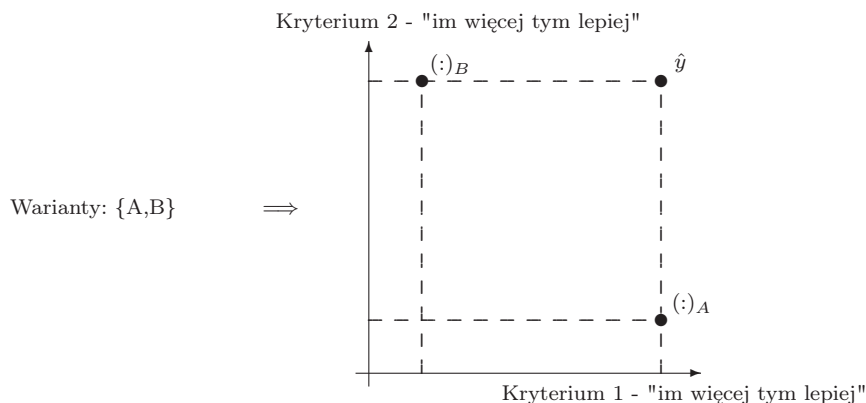
Pojecie dominacji prowadzi nas wprost do pojęcia *efektywności*.

Dla zachowania precyzji rozważań będziemy potrzebować dozy formalizmu i w tym celu zdefiniujemy problemy Wielokryterialnego Podejmowania Decyzji (WPD) w terminach zbiorów dopuszczalnych wariantów, kryteriów, oraz ocen.

U podstaw WPD leży pojęcie *efektywności*, które jest wykorzystywane dla różnicowania wariantów. Stanowi ono pomost pomiędzy nieformalną definicją problemu decyzyjnego (1) a Wielokryterialnym Podejmowaniem Decyzji. Pojęcie to pojawia się w sposób naturalny, gdy porównujemy warianty względem więcej niż jednego kryterium.

Jeżeli na przykład warianty są porównywane względem kryterium ponoszonego kosztu (wyobraźmy sobie zakup domu), wtedy w sposób naturalny można przyjąć, że wariant najtańszy jest wariantem najbardziej preferowanym.

Lecz co wtedy, gdy w grę wchodzi dodatkowe kryterium? W przypadku zakupu domu nie zapominamy przecież o powierzchni. W powszechnym odczuciu im większy dom tym lepiej (w racjonalnym oczywiście zakresie). Jak jednak postępować, gdy oba kryteria, koszt i powierzchnia, są rozpatrywane łącznie? Czy koszt może być najniższy w przypadku największego domu? W takim przypadku mielibyśmy do czynienia z prawdziwą okazją, jednak rzeczywistość rynku nieruchomości jest taka, że regułą jest, iż im większy dom tym wyższa cena. Nie wyklucza to jednak przypadków, że lokalnie może wy-



Rysunek 2 Przykład, w którym wariant utopijny nie występuje.

stąpić sytuacja, w której większy dom jest tańszy niż mniejszy (pomijamy tu inne kryteria). Taką sytuację formalizuje pojęcie dominacji.

W zbiorze wariantów dopuszczalnych wariant dopuszczalny x nazywamy *zdominowanym*, jeżeli w tym zbiorze istnieje inny wariant, powiedzmy wariant x' , taki, że

- x' jest **tak samo lub bardziej** preferowany niż x względem **wszystkich kryteriów**,

i

- x' jest **bardziej** preferowany niż x względem **co najmniej jednego** kryterium.

Jeżeli zachodzi powyżej opisana sytuacja dominacji, to wariant x' nazywamy dominującym.

Mówimy, że para wariantów x i x' , gdzie x jest zdominowany a x' jest dominujący, jest w relacji *dominacji w sensie Pareto*¹.

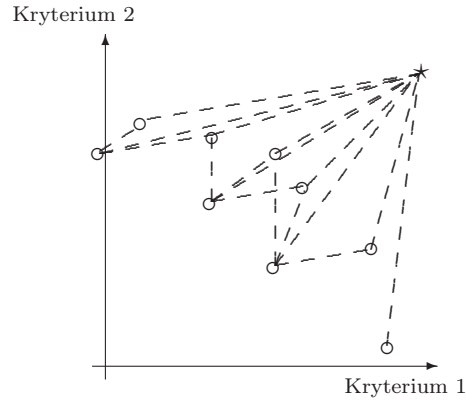
W zbiorze zawierającym więcej niż dwa warianty, w sposób oczywisty ten sam wariant może być dominujący, a jednocześnie zdominowany.

Przyjmujemy konwencje, że wszystkie kryteria są typu "im więcej tym lepiej".

Zakładamy także, że kryteria są wyrażone na skali liczbowej.

Zatem, jeżeli kryterium jest typu "im mniej tym lepiej" zawsze możemy sprowadzić go do typu "im więcej tym lepiej" mnożąc wszystkie możliwe war-

¹Vilfredo Federigo Damaso Pareto, 1848-1923, włoski ekonomista i socjolog.



Rysunek 3 Pary wariantów w relacji dominacji w sensie Pareto - przypadek I.

tości tego kryterium przez -1.

W zbiorze wariantów dopuszczalnych wariant, który nie jest dominowany przez żaden inny wariant z tego zbioru nazywamy *wariantem efektywnym*.

Innymi słowy, wariant jest efektywny, jeżeli nie istnieje inny wariant w zbiorze wariantów efektywnych, który:

- **względem wszystkich kryteriów jest w takim samym stopniu lub bardziej** preferowany

i

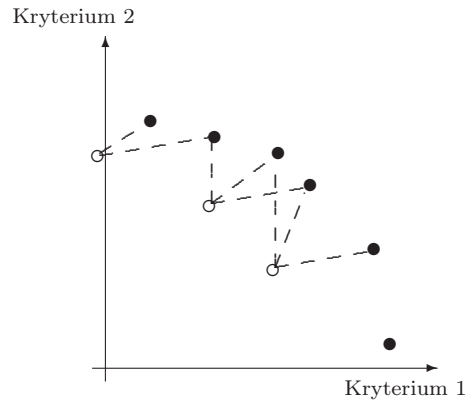
- **względem co najmniej jednego kryterium** jest bardziej preferowany.

Warunki na to, aby wariant był efektywny są słabsze niż na to, aby wariant był utopijny. W rezultacie warianty efektywne występują znacznie częściej niż warianty utopijne.

Wariant utopijny jest efektywny, ale nie odwrotnie.

Warianty, które nie są efektywne nazywamy *wariantami nieefektywnymi*.

W konwencji, w której gwiazdki oznaczają warianty utopijne, koła zaczernione oznaczają warianty efektywne nie będące jednocześnie utopijnymi, natomiast koła niezaczernione oznaczają warianty zdominowane, rysunek 3 i rysunek 4 przedstawiają kilka wariantów reprezentowanych przez wartości dwóch kryteriów. Linie przerywane pomiędzy parami wariantów wskazują, że pary te znajdują się w relacji dominacji w sensie Pareto. Na rysunku 3 jeden wariant jest w sposób oczywisty utopijny (a zatem jest efektywny).



Rysunek 4 Pary wariantów w relacji dominacji w sensie Pareto - przypadek II.

Wariant ten, z definicji, jest w relacji dominacji w sensie Pareto z każdym z pozostałych wariantów.

Rysunek 4 przedstawia ten sam zbiór wariantów, z którego jednak usunięto wariant utopijny. W tym przypadku wariantów efektywnych jest więcej niż jeden.

Jeżeli zbiór wariantów jest zadany w sposób pośredni poprzez warunki (ograniczenia), liczba wariantów może być nieskończona. W takim przypadku nie ma możliwości przedstawienia graficznie wszystkich relacji dominacji w sensie Pareto, jednak można to zrobić dla wybranych par wariantów.

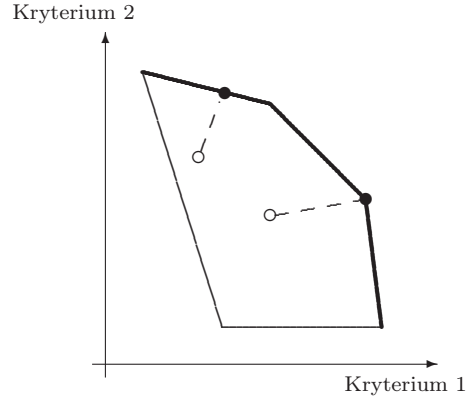
Na rysunku 5 podany jest przykład zbioru wariantów reprezentowanego przez dwa kryteria, gdzie zbiór wartości kryteriów ma kształt wieloboku.

W tym przypadku wariantami efektywnymi są te warianty, których wektory kryteriów tworzą część brzegu wieloboku oznaczoną na rysunku pogrubioną linią.

Często warianty nieefektywne są w procesach decyzyjnych pomijane, gdyż w sposób oczywisty nie są one racjonalnymi kandydatami na wariant najbardziej preferowany.

W naszym przykładzie zakupu domu, jeżeli można kupić więcej za mniej, to po co czynić przeciwnie? Dlaczego nie wykorzystać oczywistej okazji?

Jednak nie zaleca się usuwania wariantów efektywnych z rozważań w sposób bezpowrotny. W zmiennym otoczeniu decyzyjnym (na przykład, gdy zbiór kryteriów ulega zmianie), nieefektywne (to znaczy dominowane) wa-



Rysunek 5 Pary wariantów w relacji dominacji w sensie Pareto - przypadek III.

rianty mogą stać się efektywnymi.

Dlatego rozsądnie jest oznaczyć nieefektywne warianty jako tylko chwilowo pomijane w rozważaniach i zachować je dla ewentualnych dalszych analiz.

Pamiętając o powyższej uwadze o nieostatecznym statusie wariantów nieefektywnych możemy teraz bezpiecznie sformułować stwierdzenie, że przeważająca większość metod WPD sprowadza się do wyboru wariantu najbardziej preferowanego ze zbioru wariantów efektywnych.

Matematyczny model problemu WPD ma następującą postać:

wybierz wariant x dla którego wektor

$$f(x), \quad x \in X_0 \subseteq \mathcal{X}, \quad (2)$$

jest najbardziej preferowany,

gdzie \mathcal{X} jest zbiorem (przestrzenią) potencjalnych wariantów, X_0 jest zbiorem wariantów dopuszczalnych, $f : X \rightarrow \mathcal{R}^k$ jest odwzorowaniem kryterialnym, w którym $f = (f_1, \dots, f_k)$ a $f_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{R}$ jest funkcją kryterium, $i = 1, \dots, k$, $k \geq 2$. Jak już mówiliśmy wcześniej, zakładamy, że wszystkie kryteria są typu "im więcej tym lepiej".

Wariant x , dla którego $f(x)$ jest najbardziej preferowanym wektorem war-

tości (funkcji) kryteriów jest wariantem *najbardziej preferowanym*.

Z algorytmicznego punktu widzenia problem (2) jest źle postawiony. Istotnie, tak długo jak nie wiemy, co dokładnie oznacza sformułowanie "najbardziej preferowany", tak długo nie jesteśmy w stanie zaproponować żadnego sposobu dochodzenia do rozwiązania problemu.

Taka wiedza, w formie jawnej bądź niejawnej, jest w wyłącznym posiadaniu decydenta. Podstawowym założeniem metodyk podejmowania decyzji, którymi zajmujemy się tutaj jest to, że wiedza ta nie może być pozyskana od decydenta ani "z góry" ani jednorazowo.

Będziemy często wykorzystywać fakt, że następujący problem, nazywany problemem *optymalizacji wektorowej*,

$$vmax f(x), \quad x \in X_0 \subseteq \mathcal{X}, \quad (3)$$

gdzie *vmax* oznacza operację wyznaczenia wszystkich wariantów efektywnych, jest prawie zawsze dobrze postawiony, w tym sensie, że przy słabych założeniach, spełnionych na ogół zawsze w praktycznych zastosowaniach, istnieje rozwiązanie problemu (3).

W sposób całkowicie jednoznaczny warianty są reprezentowane przez odpowiadające im wartości kryteriów.

Pamiętając o tym, będziemy operować głównie na elementach $f(x)$ zbioru $f(X_0)$ i dla zwięzłości prezentacji będziemy używać y i Z dla oznaczenia

$$y = f(x), \text{ i } Z = f(X_0).$$

Oczywiście $Z \subseteq \mathcal{R}^k$. Elementy $\{y\}$ zbioru Z będziemy nazywać *ocenami*, a przestrzeń \mathcal{R}^k *przestrzenią ocen*.

Przy takiej konwencji dla danego dopuszczalnego wariantu x , y_i oznacza wartość i -tej współrzędnej oceny $y = f(x)$.

Zatem y_i jest wartością i -tego kryterium dla wariantu x .

Własności wariantów mogą być przedstawiane i analizowane w odniesieniu do ocen y .

Będziemy odwoływać się bezpośrednio do notacji x , X_0 , $f(x)$, $f(X_0)$, tylko wtedy, kiedy będziemy przedstawiać przykłady problemów WPD, w których dopuszczalne warianty będą zdefiniowane w sposób pośredni (tj. w postaci zbioru ograniczeń).

Poniżej przedstawiamy definicję ocen efektywnych oraz definicję ocen *słabo efektywnych*

Ocena $\bar{y} \in Z$ jest *efektywna*, jeżeli nie istnieje ocena y , $y \neq \bar{y}$, taka, że $y_i \geq \bar{y}_i$, $i = 1, \dots, k$, oraz $y_i > \bar{y}_i$ dla co najmniej jednego i .

Innymi słowy ocena jest efektywna jeżeli nie istnieje ocena bardziej preferowana.

Oceny, które nie są efektywne, nazywamy *ocenami nieefektywnymi*.

Z definicji wariantów efektywnych (nieefektywnych) podanej wyżej wynika, że wariant jest efektywny (nieefektywny) wtedy i tylko wtedy, gdy jego ocena jest efektywna (nieefektywna).

Innymi słowy preferencje względem ocen ustalają (implikują) preferencje względem wariantów.

Podzbiór wszystkich ocen efektywnych zbioru Z jest zwykle nazywany *zbiorem Pareto*. Będziemy często z tego określenia korzystać.

Ocena $\bar{y} \in Z$ jest *słabo efektywna*, jeżeli nie istnieje ocena y , $y \in Z$, taka, że $y_i > \bar{y}_i$, $i = 1, \dots, k$.

W dalszych rozważaniach będziemy wykorzystywać dwa elementy określone w przestrzeni \mathcal{R}^k .

Element \hat{y} przestrzeni \mathcal{R}^k , nazywany *elementem utopijnym*, jest wyznaczany jako

$$\hat{y}_i = \max_{y \in Z} y_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Będziemy zakładać, że wszystkie wyżej określone maksima istnieją.

Element \hat{y} nie musi reprezentować żadnego wariantu dopuszczalnego.

Element y^* przestrzeni \mathcal{R}^k jest wyznaczany jako

$$y_i^* = \hat{y}_i + \epsilon, \quad i = 1, \dots, k,$$

gdzie $\epsilon > 0$.

2

CHARAKTERYZACJE

Charakteryzacja A

Warunek wystarczający

Ocena, która jest rozwiązaniem problemu optymalizacyjnego

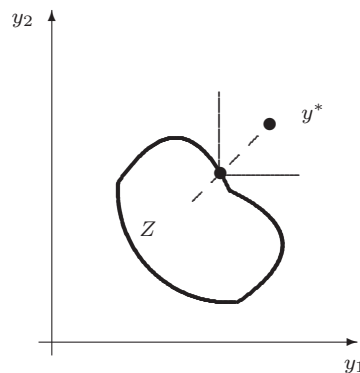
$$\min_{y \in Z} \max_i \lambda_i (y_i^* - y_i), \quad (4)$$

gdzie $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, k$, jest słabo efektywna.

♣ *Warunek konieczny*

Każda ocena słabo efektywna jest rozwiązaniem problemu optymalizacyjnego (4) dla pewnego $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, k$.

Rysunek 6 przedstawia warstwicę funkcji celu problemu optymalizacyjnego (4) odpowiadającą minimalnej wartości tej funkcji osiągniętej na zbiorze Z . Maksimum funkcji jest osiągnięte dla oceny słabo efektywnej.



Rysunek 6 Wyznaczanie ocen słabo efektywnych za pomocą problemu optymalizacyjnego (4).

Charakteryzacja B

Założmy, że Z jest **wypukły**.

Warunek wystarczający

Ocena, która jest rozwiązaniem problemu optymalizacyjnego

$$\max_{y \in Z} \sum_i \lambda_i y_i, \quad (5)$$

gdzie $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, k$, jest właściwie efektywna²

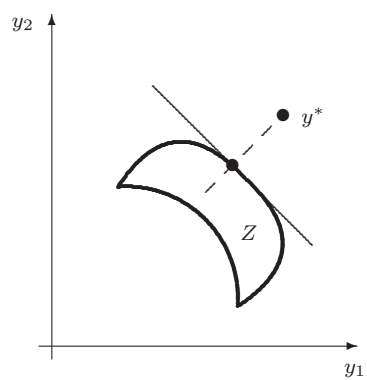
♣ *Warunek konieczny*

Każda ocena właściwie efektywna³ jest rozwiązaniem problemu optymalizacyjnego (5) dla pewnego $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, k$.

Rysunek 7 przedstawia warstwicę funkcji celu problemu optymalizacyjnego (5) odpowiadającą minimalnej wartości tej funkcji osiągniętej na R_+^k -wypukłym zbiorze Z . Minimum funkcji jest osiągnięte dla oceny właściwie efektywnej.

²Dla skończonych lub wielościanowych zbiorów ocen każda ocena efektywna jest właściwie efektywna; definicję ocen właściwie efektywnych i rozwiązań właściwie efektywnych można znaleźć np. w Kaliszewski 2008.

³*ibidem*



Rysunek 7 Wyznaczanie ocen właściwie efektywnych za pomocą problemu optymalizacyjnego (5).