

W problemie Markowitza selekcji najbardziej preferowanego portfela inwestycyjnego dokonuje się spośród dostępnych akcji przy maksymalizacji wartości oczekiwanej zwrotu z portfela (miara zysku) i minimalizacji wariancji portfela (miara ryzyka).

W problemie występuje jedno kryterium liniowe i jedno kwadratowe określone na nieskończonym zbiorze możliwych kombinacji dostępnych akcji.

W tym przypadku zbiór "racjonalnych" portfeli ma formę taką, jak to zaznaczono na rysunku 1 pogrubioną linią (przyjmujemy konwencję, że wszystkie kryteria są typu im "więcej tym lepiej", a zatem maksymalizacji podlega ujemna wartość wariancji).

Wybrane akcje powinny wykorzystać cały dostępny kapitał, zwykle normalizowany do jednostki, co powoduje, że udział akcji w portfelu jest reprezentowany za pomocą ułamków, których suma wynosi jeden.

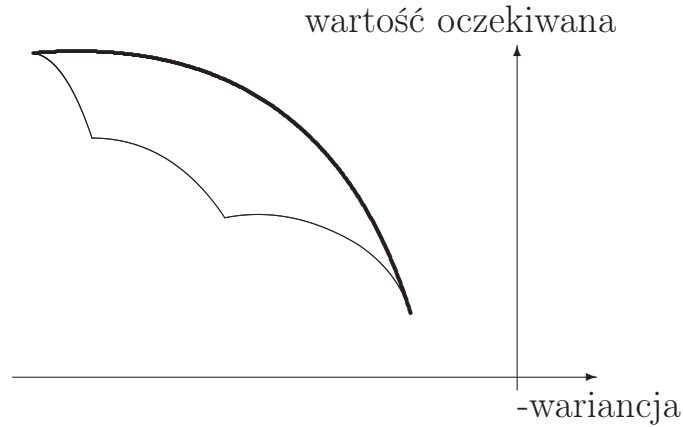
Sformułowanie problemu ma następującą postać

$$\max - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j \quad (\max -(\text{wariancja}))$$

$$\max \sum_{i=1}^n e_i x_i \quad (\max \text{ oczekiwany zwrot})$$

$$X_0 = \{x \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\} \quad (\text{ograniczenie "cały kapitał"})$$

gdzie  $\beta_{ij}$  oznacza element macierzy kowariancji dla akcji  $i$  i akcji  $j$ ,  $e_i$  oznacza wartość oczekiwaną dla akcji  $i$ .



Rysunek 1 Przykładowy zbiór ocen dla problemu wyboru portfela w terminach wartość średnia - wariancja.

Dla ilustracji rozważań rozpatrzymy przykład z danymi, które pochodzą z przykładu podanego przez Markowitza dla trzech akcji. Występujące w tym przykładzie akcje ATT, GMC, USX, scharakteryzowane są następującą macierzą kowariancji oraz wartościami oczekiwanymi zwrotów w okresie inwestycyjnym

	<i>ATT</i>	<i>GMC</i>	<i>USX</i>	
<i>ATT</i>	0,01080754	0,01240721	0,01307513	$\beta_{1j}$
<i>GMC</i>	0,01240721	0,05839170	0,05542639	$\beta_{2j}$
<i>USX</i>	0,01307513	0,05542639	0,09422681	$\beta_{3j}$
	0,0890833	0,213667	0,234583	$e_i$

Oznaczmy  $y_{-v} = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_i x_j$  i  $y_e = \sum_{i=1}^n e_i x_i$  (w rozpatrywanym przypadku  $n = 3$ ).

Przyjętą praktyką rozwiązywania problemu Markowitza jest jednokrotne rozwiązanie następującego problemu optymalizacyjnego: decydent określa minimalny poziom wartości oczekiwanej zwrotu, który jest w stanie zaakceptować (co sprowadza pierwsze kryterium do roli ograniczenia), a następnie wyznaczany jest portfel maksymalizujący ujemną wartość wariancji przy tak zadanym poziomie zwrotu. Jednak taka procedura silnie ogranicza pole decyzji decydenta.

Tutaj rozwiążemy ten problem za pomocą interaktywnego procesu podejmowania decyzji.

Przyjmijmy, że decydent chce poszukiwać portfela, który w sposób go satysfakcjonujący osiąga kompromis pomiędzy wartością oczekiwaną zwrotu  $y_e$  a wariancją  $-y_{-v}$ .

Dla wyznaczanie ocen efektywnych posłużymy się problemem optymalizacyjnym

$$\max_{y \in Z} \sum \lambda_i y_i, \quad (1)$$

gdzie  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Zbiór dopuszczalnych wektorów wag ma postać  $\bar{\Lambda} = \{\lambda \mid \lambda_{-v} \geq 0, \lambda_e \geq 0, \lambda_{-v} + \lambda_e = 1\}$ .

Problem optymalizacyjny (1) dla problemu wyboru portfela opisanego powyżej przyjmuje następującą postać

$$\begin{aligned} & \max\{\lambda_{-v}y_{-v} + \lambda_e y_e\} \\ & \max\{-\lambda_{-v} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \beta_{ij} x_i x_j + \lambda_e \sum_{i=1}^3 e_i x\} \quad (2) \\ & \sum_{i=1}^3 x_i = 1. \end{aligned}$$