

Charakteryzacja A

*Warunek wystarczający*

Ocena, która jest rozwiązaniem problemu optymalizacyjnego

$$\min_{y \in Z} \max_i \lambda_i (y_i^* - y_i), \quad (1)$$

gdzie  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , jest słabo efektywna.

*Warunek konieczny*

Każda ocena słabo efektywna jest rozwiązaniem problemu optymalizacyjnego (1) dla pewnego  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Dowód.

*Warunek wystarczający.*

Założmy, że  $\bar{y}$  jest rozwiązaniem zadania optymalizacyjnego (1), lecz nie jest oceną słabo efektywną.

Zatem z definicji słabej efektywności wynika, że istnieje ocena  $y \in Z$  taka, że

$$y_i > \bar{y}_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Obowiązuje zatem

$$y_i^* - y_i < y_i^* - \bar{y}_i, \quad \text{dla } i = 1, \dots, k.$$

Z powyższego wynika, że dla  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$  zachodzi także

$$\lambda_i (y_i^* - y_i) < \lambda_i (y_i^* - \bar{y}_i), \quad \text{dla } i = 1, \dots, k.$$

A zatem

$$\max_i \lambda_i (y_i^* - y_i) < \max_i \lambda_i (y_i^* - \bar{y}_i), \quad \text{dla } i = 1, \dots, k,$$

co oznacza, że  $\bar{y}$  nie jest rozwiązaniem (1).

*Warunek konieczny.*

Niech  $\bar{y}$  będzie oceną słabo efektywną i niech  $\bar{\lambda}_i = (y_i^* - \bar{y}_i)^{-1}$ , dla  $i = 1, \dots, k$ .

Z definicji słabej efektywności wynika, że nie istnieje ocena  $y \in Z$  taka, że  $y_i > \bar{y}_i$ , dla  $i = 1, \dots, k$ . Zatem dla każdego  $y \in Z$ ,  $y \neq \bar{y}$ , istnieje indeks  $j$  taki, że

$$y_j < \bar{y}_j.$$

Dla tego indeksu  $j$  zachodzi także

$$y_j^* - y_j > y_j^* - \bar{y}_j,$$

a także

$$\bar{\lambda}_j(y_j^* - y_j) > \bar{\lambda}_j(y_j^* - \bar{y}_j),$$

gdzie  $\bar{\lambda}_j(y_j^* - \bar{y}_j) = 1$ . Równość  $\bar{\lambda}_i(y_i^* - \bar{y}_i) = 1$  zachodzi także dla każdego  $i, i = 1, \dots, k$ .

Z powyższego wynika nierówność

$$\max_i \bar{\lambda}_i(y_i^* - y_i) > \max_i \bar{\lambda}_i(y_i^* - \bar{y}_i),$$

co oznacza, że  $\bar{y}$  jest rozwiązaniem (1).